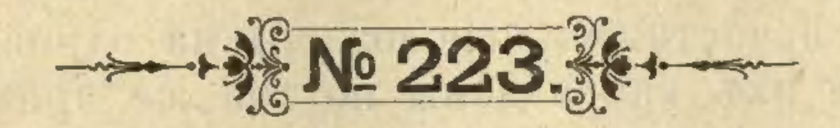
XIX Сем. 20-го октября 1895 г. № 7.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



ДВИЖЕНІЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦЪ или ТѢЛЪ.

Всякій организмъ, всякій механизмъ можно разсматривать какъ систему тѣлъ или частицъ, дѣйствующихъ другъ на друга силами равными и противоположными, направленными по прямымъ линіямъ, проходящимъ черезъ эти частицы. Всѣ силы между частицами системы называются внутренними силами ея (см. мое „Введеніе въ Механику", т. II, стр. 138).

I. Поступательное движеніе системы.

1.

Вслѣдствіе равенства и противоположности взаимодѣйствія частицъ, относительное движеніе ихъ подъ вліяніемъ однѣхъ лишь внутреннихъ силъ системы отличается характеристическими особенностями. Разсмотримъ сначала простѣйшій случай: движеніе системы изъ двухъ равныхъ взаимодѣйствующихъ частицъ. Дѣйствуя другъ на друга съ силами равными и прямо противоположными, частицы сообщаютъ другъ другу равныя же и противоположныя перемѣщенія по прямой линіи, ихъ соединяющей. Вслѣдствіе этого общее перемѣщеніе системы, равное алгебраической суммѣ перемѣщеній обѣихъ частицъ, равно нулю.

Присоединенiе къ двумъ частицамъ каждой новой частицы, лежащей на одной прямой съ ними, усложняетъ движенiе системы, увеличивая число силъ, дѣйствующихъ на каждую частицу. Перемѣщенiе каждой изъ нихъ будетъ вслѣдствiе этого составное изъ перемѣщенiй, сообщаемыхъ ей всѣми остальными частицами.

Означимъ для наглядности частицы системы послѣдовательными числами 1,2, . . . ; перемѣщенiя каждой частицы—двумя знаками; изъ нихъ первый соотвѣтствуетъ значку двигаемой частицы, второй—значку двигающей, т. е. дѣйствующей на первую. Такъ, напримѣръ, перемѣщенiе первой частицы отъ дѣйствiя 2-й равно $S_{1,2}$, отъ дѣйствiя 3-ей $S_{1,3} \ldots$ и т. д.; перемѣщенiе второй частицы отъ дѣйствiя 1-й равно $S_{2,1}$, отъ дѣйствiя 3-й $S_{2,3}$ и т. д.

Такъ какъ всѣ частицы расположены на одной прямой, и потому и всѣ перемѣщенiя ихъ направлены по той же прямой, то полное перемѣщенiе каждой частицы равно алгебраической суммѣ всѣхъ ея перемѣщенiй, производимыхъ дѣйствiями на нее остальныхъ частицъ, а именно, перемѣщенiе 1-й частицы:

$$S_1 = S_{1,2} + S_{1,3} + \cdots + S_{1,n},$$

2-й частицы:

$$S_2 = S_{2,1} + S_{2,3} + \cdots + S_{2,n} \text{ и т. д.},$$

гдѣ каждое изъ слагаемыхъ перемѣщенiй $S_{1,2}$, $S_{2,3}$ и т. д., соотвѣтственно его направленiю имѣетъ отрицательный или положительный знакъ. Вслѣдствiе равенства и противоположности взаимодѣйствiй между частицами всѣ эти слагаемыя перемѣщенiя составлены изъ паръ равныхъ и противоположныхъ перемѣщенiй, именно:

$$\pm S_{1,2} = \mp S_{2,1}; \ \pm S_{1,3} = \mp S_{3,1}; \ldots$$

вообще $S_{c,n} = S_{n,c}$.

Поэтому въ общей суммѣ всѣхъ перемѣщенiй всѣхъ частицъ оказывается столько же перемѣщенiй въ одну сторону, сколько въ другую, и, слѣдовательно, алгебраическая сумма всѣхъ перемѣщенiй всей системы равна нулю, т. е.

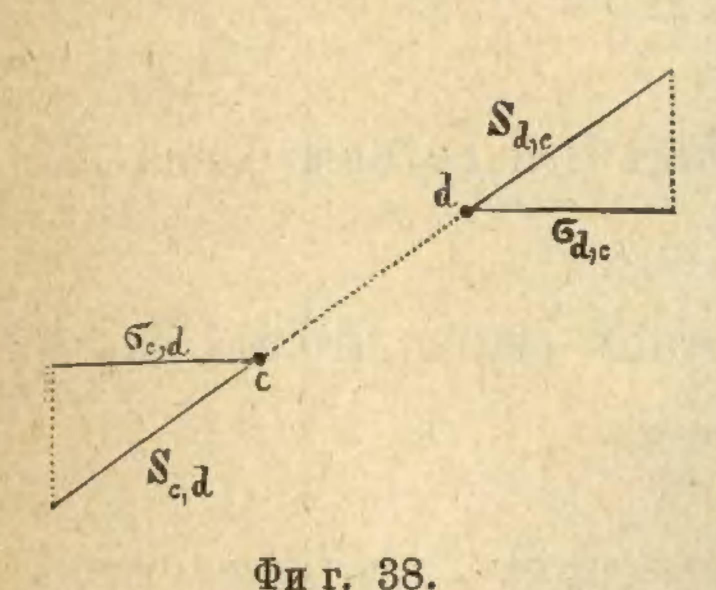
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = 0.$$

2.

Системы взаимодѣйствующихъ частицъ, расположенныхъ по одной прямой линiи, въ точномъ смыслѣ, не существуетъ; приблизительнымъ примѣромъ можетъ служить вытянутая резиновая нить, вытянутая или сжатая вдоль оси винтообразная пружина и т. п. Въ дѣйствительности всѣ частицы, а тѣмъ болѣе система ихъ, занимаютъ нѣкоторый объемъ, нѣкоторую часть пространства. Взаимодѣйствiе между частицами такой системы направлено уже не по одной прямой линiи, а по многимъ, въ разныя стороны пространства. Поэтому для опредѣленiя общаго перемѣщенiя всей системы нельзя алгебраически складывать отдѣльныя перемѣщенiя частицъ, направленныя въ разныя стороны; необходимо разсматривать движенiя системы по какому либо одному данному направ-

ленію, т. е. разлагать каждое изъ отдѣльныхъ перемѣщеній на два: на перемѣщеніе по данному направленію, параллельно данной прямой l, и на перемѣщеніе, перпендикулярное этому направленію. Это послѣднее перемѣщеніе, какъ не участвующее въ движеніи системы по данному направленію, разсматривать пока нѣтъ надобности, перемѣщенія же, параллельныя данной прямой, состоятъ, какъ и прежде, изъ паръ равныхъ и противоположныхъ перемѣщеній.

Для примѣра разложимъ равныя и противоположныя перемѣщенія $S_{c,d}$ и $S_{d,c}$, производимыя взаимодѣйствіемъ двухъ произвольныхъ частицъ c и d (фиг. 38).



Фиг. 38.

Искомыя составляющія этихъ перемѣщеній $S_{c,d}$ и $S_{d,c}$, по разсматриваемому направленію l, именно $\sigma_{c,d}$ и $\sigma_{d,c}$, представляютъ катеты прямоугольныхъ треугольниковъ съ равными гипотенузами $S_{c,d}$ и $S_{d,c}$ и равными углами (вслѣдствіе параллельности сторонъ). Поэтому перемѣщенія $\sigma_{c,d}$ и $\sigma_{d,c}$ также равны и противоположны другъ другу. Такъ какъ это справедливо для каждой пары перемѣщеній, производимыхъ взаимодѣйствіемъ частицъ, а полное перемѣщеніе всѣхъ частицъ всей системы по данному направленію представляетъ алгебраическую сумму такихъ паръ, то получимъ тотъ же окончательный результатъ: сумма всѣхъ перемѣщеній въ одну сторону равна суммѣ перемѣщеній въ другую, или иначе, алгебраическая сумма перемѣщеній всей системы параллельно данной прямой равна нулю.

3.

Частицы системы могутъ быть соединены въ группы, образуя болѣе или менѣе сложныя нераздѣльныя частицы; напримѣръ частицы c, d, e могутъ слиться въ одну группу. Въ этомъ случаѣ взаимодѣйствіе между простыми частицами, слившимися въ одну сложную, не производитъ относительнаго перемѣщенія ихъ. Такъ, если частицы c, d, e составляютъ нераздѣльную группу, то перемѣщенія $S_{c,d}$, $S_{d,c}$, $S_{d,e}$, $S_{e,d}$ равны нулю. Поэтому въ общей суммѣ перемѣщеній всѣхъ частицъ системы соотвѣтственное число паръ перемѣщеній исчезнетъ; но это не измѣнитъ равенства суммъ перемѣщеній въ обѣ противоположныя стороны, потому что какъ исчезающія изъ суммы слагаемыя перемѣщенія, такъ и остающіяся сложныя перемѣщенія представляютъ пары равныхъ и противоположныхъ перемѣщеній. Перемѣщенія всѣхъ частицъ одной и той же группы равны между собой; но въ то же время каждая изъ этихъ соединенныхъ частицъ производитъ равныя дѣйствія на каждую изъ частицъ другой группы, значитъ опять равенство и противоположность перемѣщеній въ каждой парѣ не нарушается.

Возьмемъ, напримѣръ, систему изъ равныхъ частицъ, соединенныхъ въ двѣ группы: въ 1-й группѣ m_1 частицъ, во 2-й—m_2. Каждая частица 1-ой группы сообщитъ каждой частицѣ 2-й группы въ теченіи

времени τ перемѣщеніе σ; поэтому m_1 частицъ 1-ой группы сообщатъ каждой частицѣ 2-й группы перемѣщеніе

$$S_{2,1} = \sigma \times m_1.$$

Сумма же перемѣщеній всѣхъ m_2 частицъ 2-й группы равна

$$S_{2,1} \times m_2 = \sigma \times m_1 \times m_2.$$

Обратно, каждая частица 2-й группы сообщитъ въ тотъ же промежутокъ времени τ каждой частицѣ первой группы такое же перемѣщеніе σ, только въ противоположную сторону; поэтому m_2 частицъ 2-ой группы сообщатъ каждой частицѣ 1-й группы перемѣщеніе

$$S_{1,2} = \sigma \times m_2.$$

Сумма же перемѣщеній всѣхъ m_1 частицъ 1-й группы равна

$$S_{1,2} \times m_1 = \sigma \times m_2 \times m_1.$$

Изъ сравненія перемѣщеній обѣихъ группъ видно, что эти суммы равны, т. е.

$$m_1 \times S_{1,2} = m_2 \times S_{2,1}.$$

А такъ какъ перемѣщенія одной группы прямо противоположны перемѣщеніямъ другой, то общее перемѣщеніе обѣихъ группъ вдоль прямой, ихъ соединяющей, равно нулю.

Этотъ выводъ непосредственно прилагается и къ системѣ изъ бóльшаго числа группъ, съ тою только разницею, что перемѣщенія σ, сообщаемыя взаимно отдѣльными частицами, могутъ быть различны для каждой пары группъ.

На основаніи предыдущаго получимъ:

$$\pm m_1 \times S_{1,3} = \mp m_3 \times S_{3,1};$$

$$\pm m_1 \times S_{1,4} = \mp m_4 \times S_{4,1};$$

$$\pm m_2 \times S_{2,3} = \mp m_3 \times S_{3,2}; \text{ и т. д.}$$

Если всѣ группы расположены на одной прямой, то полное перемѣщеніе каждой частицы отдѣльной группы представляетъ алгебраическую сумму всѣхъ ея перемѣщеній, сообщенныхъ остальными группами, т. е.

$$S_1 = S_{1,2} + S_{1,3} + \cdots + S_{1,n}$$

$$S_2 = S_{2,1} + S_{2,3} + \cdots$$

Сумма перемѣщеній всѣхъ частицъ каждой группы равна

$$m_1 \times S_1 = m_1 \times S_{1,2} + m_1 \times S_{1,3} + \cdots + m_1 \times S_{1,n}$$

$$m_2 \times S_2 = m_2 \times S_{2,1} + m_2 \times S_{2,3} + \cdots \text{ и т. д.}$$

Поэтому сумма всѣхъ перемѣщеній всѣхъ частицъ системы, т. е.

$$m_1 \times S_1 + m_2 \times S_2 + \cdots + m_n \times S_n$$

сложится изъ паръ равныхъ и противоположныхъ слагаемыхъ и, слѣдовательно, равна нулю.

Тотъ же результатъ получимъ и для системы, расположенной не на одной прямой, а какъ нибудь въ пространствѣ, такъ какъ сумма перемѣщеній по какому либо одному направленію все таки сложится изъ паръ равныхъ и противоположныхъ слагаемыхъ.

4.

Къ этому же результату мы придемъ и другимъ способомъ вывода, не прибѣгая къ предположенію, что неравныя массы отдѣльныхъ частей системы составляютъ группу равныхъ частицъ, но на основаніи того же закона равнаго взаимодѣйствія. По этому закону силы взаимодѣйствія между каждою парою массъ m_1 и m_n по прежнему равны и противоположны, т. е.

$$\pm f_{c,d} = \mp f_{d,c}.$$

Въ одинъ и тотъ же промежутокъ времени, равные импульсы этихъ силъ возбудятъ равныя количества движенія

$$m_c \times v_{c,d} = m_d \times v_{d,c}$$

съ противоположными по направленію скоростями $v_{c,d}$ и $v_{d,c}$. Точно также будутъ равны и противоположны количества движенія, возбужденныя взаимодѣйствіемъ тѣхъ же частицъ съ остальными массами и всѣхъ массъ системы вообще. Такимъ образомъ общая сумма всѣхъ количествъ движенія всѣхъ массъ системы сложится изъ паръ равныхъ слагаемыхъ съ противоположными знаками.

Это равенство и противоположность сохраняютъ свое значеніе и въ томъ случаѣ, когда массы системы m_1, m_2... расположены не на одной прямой линіи, а произвольно въ пространствѣ. Для опредѣленія движенія системы по какому либо опредѣленному направленію, нужно, какъ и въ предыдущемъ выводѣ, взять проекцію всѣхъ скоростей на это направленіе. Такъ какъ для обѣихъ частицъ каждой пары отдѣльно углы между скоростями v и ихъ проекціями w равны, то треугольники, построенные на этихъ скоростяхъ v и w, подобны, и потому

$$w_{d,c} : w_{c,d} = v_{d,c} : v_{c,d}.$$

Поэтому вмѣсто равенства

$$m_c \cdot v_{c,d} = m_d \cdot v_{d,c}$$

получимъ

$$m_c \cdot w_{c,d} = m_d \cdot w_{d,c}.$$

Значитъ равенство количествъ движенія не нарушится.

То же самое получимъ и для всѣхъ другихъ паръ количествъ движенія. Такъ какъ всѣ слагаемыя скорости каждой частицы

$$w_{c,a}, w_{c,b}, w_{c,d} \ldots$$

направлены по одной прямой, то полная скорость каждой частицы равна алгебраической суммѣ всѣхъ слагаемыхъ скоростей. Вслѣдствіе же противоположности скоростей каждой пары *общая алгебраическая сумма всѣхъ количествъ движенія всѣхъ массъ системы, отъ дѣйствія внутреннихъ силъ, равна нулю.*

Въ этомъ видѣ выражается обыкновенно законъ дѣйствія внутреннихъ силъ; очевидно, это выраженіе тожественно съ прежде выведеннымъ. Съ теченіемъ времени движенія направленіе перемѣщенія и скорости частицъ системы могутъ мѣняться; всѣ эти выводы относятся къ промежуткамъ времени столь малымъ, что въ теченіи ихъ направленія перемѣщенія сохраняются. Для новыхъ направленій движеній и соотвѣтственно новаго промежутка времени тотъ же законъ, по тѣмъ же причинамъ, сохраняетъ свою силу.

II. Центръ инерціи.

1.

Равенство и противоположность перемѣщеній частицъ системы подъ вліяніемъ взаимодѣйствія не только не допускаетъ систему удалиться отъ даннаго мѣста въ какую либо одну сторону, но даже измѣнить среднее положеніе въ пространствѣ. Въ случаѣ взаимнопритягательныхъ силъ частицы системы сошлись бы въ одной точкѣ пространства, и затѣмъ, при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ системы подъ вліяніемъ внутреннихъ силъ, сумма перемѣщеній частицъ въ одну сторону отъ точки схода всегда будетъ равна суммѣ перемѣщеній въ другую сторону.

Такъ, напримѣръ, если система состоитъ всего изъ двухъ равныхъ частицъ, онѣ сошлись бы подъ вліяніемъ взаимнаго притяженія на срединѣ прямой, ихъ соединяющей; и затѣмъ, въ случаѣ удаленія частицъ другъ отъ друга подъ вліяніемъ взаимнаго отталкиванія, онѣ всегда удалялись бы на равныя разстоянія отъ этой точки схода.

Такимъ образомъ точка схода частицъ представляетъ своего рода центръ системы, всегда остающійся внутри контура, проведеннаго черезъ крайнія частицы системы при всевозможныхъ движеніяхъ ея отъ дѣйствія внутреннихъ силъ. Положеніе этого центра опредѣляется первоначальнымъ расположеніемъ частицъ системы.

Найдемъ сначала центръ прямолинейной системы изъ произвольнаго числа равныхъ частицъ. Положеніе этихъ частицъ опредѣляется разстояніемъ ихъ

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n$$

отъ какой либо начальной точки прямой линіи ихъ расположенія, по которой направлено ихъ взаимодѣйствіе и ихъ перемѣщенія. Въ случаѣ притягательныхъ силъ между частицами и безпрепятственнаго ихъ сближенія онѣ сошлись бы въ нѣкоторой средней точкѣ на той же прямой, пройдя соотвѣтственныя разстоянія

$$s_1,\ s_2, \ldots s_n.$$

Поэтому общее положенiе ихъ и разстоянiе x_0 отъ той же начальной точки опредѣляется суммою прежняго разстоянiя и совершеннаго перемѣщенiя, т. е.

$$x_1 + s_1 = x_0;\ x_2 + s_2 = x_0; \ldots x_n + s_n = x_0.$$

Такъ какъ алгебраическая сумма всѣхъ перемѣщенiй

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n,$$

совершенныхъ исключительно подъ влiянiемъ взаимодѣйствiя, равна нулю, то, слѣдовательно, сумма прежнихъ разстоянiй всѣхъ частицъ равна суммѣ новыхъ, т. е.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_0 + x_0 + \cdots + x_0 = x_0.n.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Слѣдовательно разстоянiе точки схода частицъ системы подъ влiянiемъ взаимнаго притяженiя равно средней ариѳметической величинѣ разстоянiя всѣхъ единичныхъ частицъ ея.

Расходясь отъ этого центра подъ влiянiемъ взаимнаго отталкиванiя, и двигаясь затѣмъ вообще подъ влiянiемъ какихъ бы то ни было силъ равнаго и противоположнаго взаимодѣйствiя, частицы совершатъ соотвѣтственныя перемѣщенiя

$$s'_1,\ s'_2, \ldots s'_n.$$

Поэтому новыя разстоянiя частицъ отъ той же начальной точки будутъ

$$x'_1 = x_0 + s'_1;\ x'_2 = x_0 + s'_2; \ldots x'_n = x_0 + s'_n.$$

Такъ какъ алгебраическая сумма перемѣщенiй

$$s'_1 + s'_2 + \cdots s'_n$$

по прежнему равна нулю, то сумма разстоянiй новыхъ положенiй частицъ должна быть равна суммѣ прежнихъ разстоянiй, т. е.

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = x_0 + x_0 + \cdots + x_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Вслѣдствiе этого разстоянiе средней точки системы, ея центра, останется то же самое, именно

$$x_0 = \frac{x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Значитъ точка схода частицъ системы, ея центръ, останется неподвижнымъ.

При произвольномъ расположенiи частицъ въ пространствѣ перемѣщенiя ихъ направлены въ разныя стороны. Поэтому для опредѣленiя

общихъ свойствъ движенія системы разсматривается, какъ мы видѣли, движеніе ея по каждому направленію отдѣльно. Соотвѣтственно этому положенія частицъ системы и средней точки ея необходимо опредѣлять разстояніми ихъ по тому же направленію, отъ одной перпендикулярной къ перемѣщеніямъ плоскости.

Положимъ система состоитъ изъ n равныхъ частицъ, удаленныхъ отъ плоскости УZ по перпендикулярному направленію на разстоянія

$$x_1,\ x_2, \dots x_n.$$

Въ случаѣ взаимнопритягательныхъ силъ, частицы сошлись бы въ одной точкѣ, совершивъ перемѣщенія

$$s_1,\ s_2, \dots s_n.$$

Перемѣщенія эти, какъ уже сказано, не перпендикулярны къ плоскости ZУ, не параллельны прямымъ разстояніямъ x; поэтому для опредѣленія измѣненій этихъ разстояній нужно взять составляющія перемѣщенія вдоль x

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \dots \sigma_n.$$

Тогда общее разстояніе частицъ отъ плоскости УZ, въ новомъ ихъ положеніи, въ точкѣ схода, равны:

$$x_0 = x_1 + \sigma_1 = x_2 + \sigma_2 = \cdots$$

Перемѣщенія σ имѣютъ то же свойство какъ и полныя перемѣщенія отъ дѣйствія внутреннихъ силъ, т. е. алгебраическая сумма ихъ равна нулю

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 0.$$

Поэтому сумма разстояній частицъ отъ плоскости УZ не измѣнится, т. е.

$$x_0 + x_0 + \cdots + x_0 = nx_0 = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Отсюда разстояніе точки схода отъ плоскости ZУ равно

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Если частицы разойдутся подъ вліяніемъ взаимодѣйствія въ разныя стороны, то все таки алгебраическая сумма ихъ перемѣщеній по данному направленію, какъ видно изъ предыдущаго, равна будетъ нулю, и потому сумма новыхъ разстояній частицъ отъ плоскости УZ останется та же, что и была. Поэтому и разстояніе центра отъ плоскости x_0 останется безъ измѣненія.

Системы взаимодѣйствующихъ тѣлъ, существующія въ природѣ, состоятъ вообще изъ неравныхъ массъ. Но, какъ уже сказано, эти неравныя массы дѣйствуютъ другъ на друга съ силами равными и прямо противоположными, какъ и равныя частицы; по предыдущему можно принять эти массы за группы изъ неодинаковыхъ чиселъ равныхъ ча-

стицъ. Такая система представляетъ лишь частный случай системы изъ одинаковыхъ частицъ: разница только въ томъ, что каждое изъ слагаемыхъ перемѣщеній σ входитъ въ общую сумму всѣхъ перемѣщеній всѣхъ частицъ системы столько разъ, сколько единичныхъ частицъ заключается въ соотвѣтственной группѣ. Такъ, если въ одной группѣ m_1 частицъ, въ другой—m_2, и т. д., то сумма перемѣщеній всѣхъ частицъ 1-ой группы—равна $m_1.\sigma_1$, 2-ой группы $m_2.\sigma_2$ и т. д.

Но это, какъ мы видѣли, не измѣняетъ общаго свойства суммы всѣхъ перемѣщеній всѣхъ частицъ системы отъ дѣйствія ея внутреннихъ силъ; эта сумма равна нулю, т. е.

$$m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \cdots + m_n \sigma_n = 0.$$

Перемѣщенія частицъ системы измѣняютъ на свою величину разстоянія частицъ отъ начальной плоскости ZУ. Такъ, если до перемѣщенія разстоянія соотвѣтственной группы частицъ отъ плоскости ZУ были

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

то послѣ перемѣщенія эти разстоянія будутъ:

$$x_1 + \sigma_1;\ x_2 + \sigma_2; \ldots\ x_n + \sigma_n.$$

Но если алгебраическая сумма всѣхъ перемѣщеній всѣхъ частицъ системы равняется нулю, то и сумма разстояній всѣхъ частицъ отъ плоскости ZУ должна остаться безъ измѣненія. До перемѣщенія эта сумма разстояній была

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n.$$

Послѣ перемѣщенія она будетъ

$$m_1(x_1 + \sigma_1) + m_2(x_2 + \sigma_2) + \cdots + m_n(x_n + \sigma_n)$$

или

$$(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n) + (m_1 \sigma_1 + \cdots + m_n \sigma_n).$$

Такъ какъ вторая группа слагаемыхъ этой суммы, по доказанному. равна нулю, то, слѣдовательно, сумма разстояній всѣхъ частицъ отъ плоскости ZУ дѣйствительно не измѣняется.

Въ частномъ случаѣ, если означенныя перемѣщенія частицъ происходятъ подъ вліяніемъ взаимнаго притяженія, до встрѣчи ихъ въ одной точкѣ, то разстоянія всѣхъ этихъ частицъ отъ плоскости ZУ сдѣлались бы равными, именно

$$x_1 + \sigma_1 = x_0;\ x_2 + \sigma_2 = x_0; \cdots x_n + \sigma_n = x_0$$

и тогда сумма разстояній всѣхъ частицъ равнялась бы

$$m_1(x_1 + \sigma_1) + m_2(x_2 + \sigma_2) + \cdots + m_n(x_n + \sigma_n) = m_1 x_0 + m_2 x_0 + \cdots + m_n x_0.$$

Принимая въ разсчетъ выведенное свойство суммы перемѣщеній σ, получимъ:

$$m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) x_0.$$

Отсюда найдемъ разстояніе точки схода частицъ, т. е. центра системы, отъ плоскости ZУ

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Такъ какъ числитель представляетъ сумму первоначальнаго разстоянія всѣхъ частицъ отъ начальной плоскости, а знаменатель—число всѣхъ частицъ въ системѣ, то, слѣдовательно, разстояніе центра x_0 равно, какъ и прежде, средней ариѳметической величинѣ разстояній всѣхъ единичныхъ частицъ отъ той же плоскости.

Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется вполнѣ разстояніемъ ея отъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей. Но доказанное свойство перемѣщенія системы относительно одной произвольной плоскости очевидно справедливо и по отношенію къ другимъ плоскостямъ. Поэтому, обозначивъ разстояніе частицъ системы отъ второй плоскости ZУ, перпендикулярной къ первой, буквами

$$y_1, \; y_2 \cdots y_n$$

и отъ третьей плоскости XУ (перпендикулярной къ обѣимъ остальнымъ) буквами

$$z_1, \; z_2, \ldots z_n$$

получимъ подобныя же выраженія для разстояній центра отъ этихъ плоскостей ZУ и УX

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

и

$$z_0 = \frac{m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Всѣ эти выводы и выраженія показываютъ, что при всевозможныхъ перемѣщеніяхъ системы исключительно подъ вліяніемъ равнаго и противоположнаго взаимодѣйствія ея частицъ средняя точка системы, точка схода ея частицъ, останется неподвижною; частицы же перемѣщаются лишь относительно этой точки. Такимъ образомъ эта точка обладаетъ однимъ изъ свойствъ инерціи, и потому называется центромъ инерціи.

Проф. *П. Фанъ-деръ-Флитъ* (Спб.).

СОХРАНЕНІЕ и ПРЕВРАТИМОСТЬ ЭНЕРГІИ.

(*Продолженіе**).

II. Законъ Ома.

§ 84. Когда токъ установился, черезъ каждое поперечное сѣченіе цѣпи протекаетъ одинаковое количество электричества. По каждому однородному проводнику токъ идетъ со стороны бо́льшаго потенціала въ сторону меньшаго, электрическія силы производятъ при этомъ положительную работу. Работа эта равна количеству протекающаго электричества, умноженному на разность потенціаловъ начальной и конечной точекъ, т. е. на паденіе потенціала на этомъ проводникѣ. Работа, производимая въ 1 сек., равна силѣ тока, умноженной на паденіе потенціала. Называя эту работу буквой τ, силу тока—буквой J, потенціалы начальной и конечной точекъ—буквами v и v_1, получимъ $\tau = J(v - v_1)$. Работа, производимая въ 1 сек. на протяженіи всѣхъ проводниковъ, равна силѣ тока, умноженной на сумму паденій потенціала на протяженіи всѣхъ проводниковъ, или на электровозбудительную силу цѣпи (§ 83). Называя работу буквой T, электровозбудительную силу—буквой E, получимъ

$$T = JE.$$

§ 85. *Гипотеза Ома.* Основные законы движенія опредѣляютъ отношеніе матеріи къ дѣйствію силъ. Подчиняются-ли этимъ законамъ электрическія массы? Сомнѣніе можетъ возбуждать только законъ инерціи. Обладаетъ ли электричество инерціей? Мы не можемъ еще категорически отвѣтить на этотъ вопросъ, однако обладаемъ уже закономъ, который хотя и не рѣшаетъ его, все же проливаетъ на него нѣкоторый свѣтъ. Это—законъ Ома, или лежащая въ его основаніи такъ называемая *гипотеза Ома*. Эта гипотеза состоитъ въ томъ, что *количество электричества, протекающее черезъ единицу поперечнаго сѣченія проводника* (или, что то же, скорость движенія электричества) *пропорціонально дѣйствующей въ этомъ мѣстѣ электрической силѣ.* При дѣйствіи силы на матерію, скорость, вообще говоря, зависитъ какъ отъ величины силы, такъ и отъ времени дѣйствія. Это слѣдствіе начала инерціи. Поэтому гипотеза Ома, противорѣчащая этому слѣдствію, противорѣчитъ, повидимому, и самому началу и указываетъ, что электричество не инертно. Однако нѣкоторые случаи движенія обыкновенной матеріи наводятъ на мысль о возможности примиренія гипотезы Ома и начала инерціи. Лошадь, везущая возъ равномѣрно по ровной горизонтальной дорогѣ, должна все время употреблять усиліе, которое однако не сообщаетъ возу ускоренія. Это усиліе должно быть тѣмъ больше, чѣмъ больше скорость движенія. Однако отсюда не слѣдуетъ, что возъ не обладаетъ инерціей, потому что усиліе идетъ здѣсь не на поддер-

*) См. „В. О. Ф." №№ 217, 218, 219, 220, 221 и 222.

жаніе сообщенной возу скорости, которая сохраняется по инерціи, а всецѣло на преодолѣваніе сопротивленій. Теперь легко допустить, что могутъ быть такія сопротивленія, которыя какъ разъ пропорціональны первой степени скорости; тогда и сила, идущая всецѣло на преодолѣніе этихъ сопротивленій, должна быть пропорціональна скорости. Итакъ, гипотеза Ома можетъ быть истолкована какъ въ смыслѣ отрицанія инертности электричества, такъ и въ смыслѣ, допускающемъ примиреніе съ этимъ началомъ; только въ послѣднемъ случаѣ — въ этомъ ограниченіи и сказывается значеніе гипотезы — необходимо допустить, что электричество при движеніи по проводникамъ, встрѣчаетъ въ нихъ сопротивленіе, пропорціональное скорости движенія. Существуютъ явленія, какъ колеблющійся разрядъ лейденской банки, которыя, повидимому, не могутъ быть иначе объяснены, какъ инертностью электричества; однако нельзя сказать, чтобы этотъ взглядъ сталъ господствующимъ.

§ 86. *Законъ Ома.* Итакъ, по гипотезѣ Ома количество электричества q, протекающее въ 1 сек. черезъ 1 кв. сант. поперечнаго сѣченія проводника, пропорціонально электрической силѣ f, дѣйствующей на единицу электричества, помѣщенную въ этомъ сѣченіи. Если въ другомъ сѣченіи протекаетъ черезъ 1 кв. сант. q' единицъ электричества, а сила, дѣйствующая въ этомъ сѣченіи, равна f', то по гипотезѣ Ома

$$\frac{q}{q'} = \frac{f}{f'}, \text{ или } \frac{f'}{q'} = \frac{f}{q}.$$

Отношеніе $\frac{f}{q}$, постоянное для одного и того же проводника, представляетъ сопротивленіе даннаго проводника каждой единицѣ протекающаго электричества и называется удѣльнымъ сопротивленіемъ его вещества. Обозначимъ его буквой ϱ. Тогда

$$f = \varrho q = \frac{\varrho q s}{s} = \frac{\varrho J}{s},$$

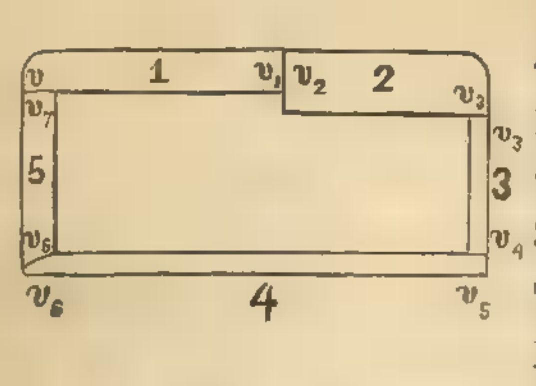
такъ какъ $J = qs$, гдѣ s — площадь сѣченія.

Выдѣлимъ часть цѣпи, представляющую однородный проводникъ, имѣющій по всей длинѣ одинаковую площадь сѣченія s. Для такого проводника f есть величина постоянная. Если длина проводника равна l, то работа при передвиженіи единицы электричества по этому проводнику равна $fl = \varrho \frac{Jl}{s}$. Эта работа должна быть равна разности потенціаловъ на концахъ этого проводника. Обозначимъ потенціалы въ началѣ и въ концѣ проводника соотвѣтственно черезъ v и v_1. Тогда

$$v - v_1 = \varrho \frac{Jl}{s}, \text{ или } J = \frac{v - v_1}{\frac{\varrho l}{s}}.$$

Обозначимъ $\frac{\varrho l}{s}$ одной буквой r; эта величина называется сопротивленіемъ проводника. Тогда $J = \frac{v - v_1}{r}$. Разобьемъ всю цѣпь на подобные

проводники. Положимъ, что вся цѣпь (фиг. 39) распадается на 5 такихъ частей, изъ которыхъ 2 и 3 однородны, точно также 4 и 5. Обозначимъ потенціалы въ началѣ и концѣ каждой части въ послѣдовательномъ порядкѣ черезъ v_1, v_2, v_3..., причемъ одинаковые потенціалы обозначаются однимъ и тѣмъ же знакомъ, напр. потенціалы въ концѣ 2-й и въ началѣ 3-й частей, которыя однородны. Сопротивленія частей обозначимъ послѣдовательно черезъ r_1, r_2, r_3..., силу тока —черезъ J.



Фиг. 39.

Примѣняя выведенную выше формулу ко всѣмъ частямъ, найдемъ:

$$J = \frac{v - v_1}{r_1} = \frac{v_2 - v_3}{r_2} = \frac{v_3 - v_4}{r_3} = \frac{v_5 - v_6}{r_4} = \frac{v_6 - v_7}{r_5}.$$

Отсюда

$$J = \frac{v - v_1 + v_2 - v_3 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + v_6 - v_7}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5} = \frac{(v - v_7) + (v_2 - v_1) + (v_5 - v_4)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}.$$

Числитель равенъ электровозбудительной силѣ цѣпи (§ 83), а знаменатель, сумма сопротивленій всѣхъ проводниковъ, называется сопротивленіемъ всей цѣпи. Обозначимъ его буквой R. Тогда

$$J = \frac{E}{R}.$$

Это—законъ Ома.

§ 87. Выведенныя равенства даютъ намъ возможность составить болѣе точное понятіе объ измѣненіи потенціала въ цѣпи. Такъ какъ паденія потенціала на протяженіи отдѣльныхъ проводниковъ, или частей проводниковъ, пропорціональны сопротивленіямъ этихъ частей, то потенціалъ падаетъ быстрѣе на тѣхъ проводникахъ, которые представляютъ большее сопротивленіе на каждую единицу длины. Если бы въ какомъ либо мѣстѣ цѣпи мы ввели проводникъ съ очень большимъ сопротивленіемъ, значительно превышающимъ сумму сопротивленій остальныхъ частей цѣпи, то паденіе потенціала на остальныхъ частяхъ почти не было бы замѣтно, а паденіе на протяженіи даннаго проводника было бы почти равно электровозбудительной силѣ цѣпи. Предѣльный случай представляетъ разрывъ цѣпи, когда разность потенціаловъ на раздѣленныхъ концахъ равна электровозбудительной силѣ, а на каждомъ изъ проводниковъ потенціалъ постояненъ.

III. Превращеніе энергіи тока въ теплоту и обратно.

§ 88. *Законъ Джауля.* Работа электрическихъ силъ тока на протяженіи одного проводника равна $\tau = J(v - v_1)$ (§ 84), или, такъ какъ $\frac{v - v_1}{R} = J$, то $v - v_1 = JR$ и $\tau = J^2R$. Подобнымъ же образомъ можно получить работу на протяженіи всей цѣпи:

$$T = J^2R.$$

Если батарея просто замкнута проволокой, то вся работа электрическихъ силъ идетъ на преодолѣваніе сопротивленія проводниковъ. Въ чемъ состоитъ это сопротивленіе, мы въ точности не знаемъ; но оно, подобно обыкновенному тренію, ведетъ къ развитію теплоты; т. е. здѣсь происходитъ въ окончательномъ результатѣ превращеніе электрической энергіи въ теплоту, хотя промежуточныя стадіи этого процесса намъ неизвѣстны. Поэтому *количество теплоты, развиваемой въ любой части цѣпи*, представляетъ эквивалентъ работы электрическихъ силъ, и слѣд., *пропорціонально квадрату силы тока и для различныхъ проводниковъ одной и той же цѣпи пропорціонально ихъ сопротивленіямъ.* Поэтому, если ввести въ цѣпь очень большое сопротивленіе, то въ этой части будетъ развиваться наибольшее количество теплоты. Очень тонкая платиновая проволока, угольная нить, или тонкій слой воздуха между углями въ приборѣ для Вольтовой дуги представляютъ большое сопротивленіе току; на нихъ развивается большое количество теплоты; а такъ какъ теплоемкость ихъ мала, то температура ихъ повышается до накаливанія. На этомъ основано электрическое освѣщеніе.

§ 89. *Явленіе Пельтье.* На протяженіи всѣхъ проводниковъ электричество движется со стороны бо̀льшаго потенціала въ сторону меньшаго, и электрическія силы производятъ положительную работу. Но при переходѣ съ одного проводника на другой, въ мѣстахъ прикосновенія, въ которыхъ потенціалъ повышается, электричество движется съ меньшаго потенціала на большій; слѣдовательно электрическія силы производятъ отрицательную работу. Положительную работу производятъ здѣсь силы, которыя мы объяснили себѣ разностями въ притяженіи положительнаго и отрицательнаго электричествъ частицами различныхъ проводниковъ. Мы не знаемъ природы этихъ силъ, но несомнѣнно, что онѣ находятся въ связи съ тепловымъ движеніемъ частицъ проводниковъ, такъ что положительная работа этихъ силъ сопровождается тратой теплоты, отрицательная — развитіемъ теплоты. Поэтому въ тѣхъ спаяхъ, гдѣ электричество переходитъ съ меньшаго потенціала на большій, происходитъ охлажденіе, а въ тѣхъ, гдѣ электричество переходитъ съ большаго на меньшій, происходитъ развитіе теплоты. Это явленіе было открыто *Пельтье.*

§ 90. *Термоэлектрическіе токи.* Положимъ теперь, что двѣ пластинки, мѣдная и цинковая, слегка изогнутыя, спаяны концами въ кольцо. Если оба спая находятся при одинаковой температурѣ, то въ обоихъ потенціалъ внезапно увеличивается на одну и ту же величину при переходѣ съ мѣди на цинкъ, а на протяженіи каждой пластинки онъ постояненъ. Электричество въ такой цѣпи будетъ въ равновѣсіи. Если же одинъ изъ спаевъ нагрѣть, то разность потенціаловъ въ этомъ спаѣ возрастаетъ. Въ другомъ спаѣ она осталась прежняя. Слѣдовательно электричество не можетъ прійти въ равновѣсіе въ такой цѣпи. Въ тепломъ спаѣ, вслѣдствіе возрастанія электровозбудительной силы, потенціалъ цинка увеличится, потенціалъ мѣди уменьшится: электричество будетъ по цинку течь отъ теплаго спая къ холодному, тамъ переходить на мѣдь, по мѣди перетекать отъ холоднаго спая къ теплому и въ этомъ послѣднемъ переходить на цинкъ и т. д. Такіе токи называются *термоэлектрическими.*

§ 91. Въ разсмотрѣнной термоэлектрической цѣпи положительное электричество переходитъ въ тепломъ спаѣ съ меньшаго потенціала на большій, а въ холодномъ — съ большаго на меньшій. Въ 1-мъ спаѣ электрическія силы производятъ отрицательную работу, во второмъ — положительную. Абсолютная величина работы въ 1-мъ спаѣ больше, чѣмъ во второмъ, такъ какъ разность потенціаловъ тамъ больше. Значитъ въ общемъ въ спаяхъ производится электрическая энергія. На основаніи того, что было сказано о явленіи Пельтье, мы знаемъ, что въ тепломъ спаѣ теплота поглощается, въ холодномъ — выдѣляется. Эти количества тепла составляютъ эквиваленты производимой и расходуемой электрической энергіи; слѣд. количество тепла, поглощаемаго въ тепломъ спаѣ, больше того, которое выдѣляется въ холодномъ; разность превращается въ электрическую энергію. Эта энергія тратится на протяженіи проводниковъ и превращается обратно въ теплоту. Сколько теплоты тратится въ спаяхъ, столько возстановляется въ проводникахъ.

Такой термоэлектрическій элементъ, который замкнутъ самъ на себя, подобенъ паровой машинѣ, части которой движутся, не производя работы. Теплота тратится въ топкѣ (теплый спай) и возстановляется въ холодильникѣ (холодный спай); но тратится больше, чѣмъ возстановляется, такъ что въ общемъ въ топкѣ и въ холодильникѣ происходитъ трата теплоты. Эта расходуемая теплота возстановляется треніемъ частей машины. Разница между термоэлектрическимъ токомъ и паровой машиной та, что въ первомъ посредствующимъ звеномъ въ цѣпи превращеній служитъ электрическая энергія, во второй — упругость пара.

IV. Превращеніе химической энергіи въ электрическую и обратно.

§ 92. Алгебраическая сумма всѣхъ количествъ тепла, производимыхъ въ термоэлектрической цѣпи, равна нулю; въ обыкновенной гальванической цѣпи она положительна. Теплота, развиваемая на протяженіи всѣхъ проводниковъ, есть результатъ траты электрической энергіи; но эта послѣдняя возникаетъ какъ эквивалентъ траты не теплоты, а химической энергіи. Въ самомъ дѣлѣ, когда батарея производитъ токъ, внутри ея развивается количество тепла, меньшее того, какое эквивалентно расходуемой химической энергіи, и меньшее какъ разъ на столько, сколько потомъ развивается въ цѣпи, какъ результатъ работы электрическихъ силъ тока. Слѣдовательно, въ батареѣ расходуемая химическая энергія превращается частью въ теплоту, а частью въ электрическую энергію, а эта послѣдняя превращается уже въ теплоту во внѣшней цѣпи. Такимъ образомъ все количество тепла, которое развивается, какъ внутри батареи, такъ и во внѣшней цѣпи, составляетъ точный эквивалентъ расходуемой химической энергіи. Это подтверждено было опытами Фавра.

§ 93. Если посредствомъ тока разлагается вода, или соли, то энергія тока только частью превращается въ теплоту, другая же часть превращается въ химическую энергію продуктовъ разложенія. Такимъ образомъ здѣсь происходитъ трата химической энергіи въ батареѣ и возстановленіе въ приборѣ для разложенія. Но возстановляется меньшее

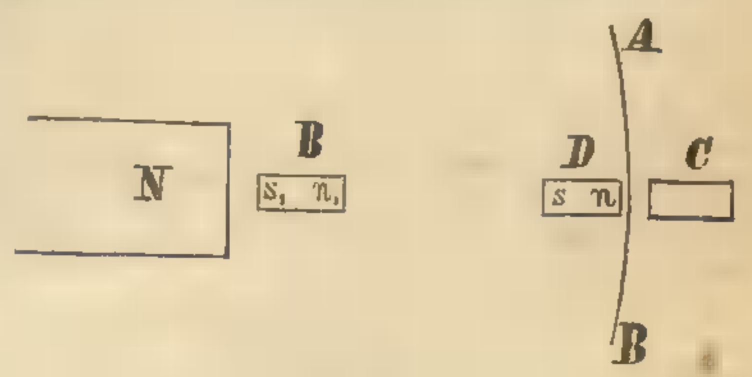
количество энергіи, чѣмъ тратится. Теплота, выдѣляющаяся въ цѣпи, представляетъ эквивалентъ разности этихъ двухъ количествъ химической энергіи.

К. Магнитная энергія.

I. Энергія магнитовъ.

§ 94. Магнитныя силы дѣйствуютъ по тѣмъ же законамъ, что и электрическія. Всякій магнитъ создаетъ вокругъ себя магнитное поле, и перемѣщеніе въ этомъ полѣ другого магнита сопровождается работой магнитныхъ силъ. Разница только въ томъ, что магнитизмъ не можетъ быть отдѣленъ отъ магнитнаго тѣла и противоположные магнитизмы не могутъ быть изолированы на отдѣльныхъ кускахъ магнита. Поэтому магнитное поле всегда подобно электрическому полю, образованному двумя электрическими зарядами, равными и противоположными по знаку: части поля, ближайшія къ одному полюсу, противоположны по знаку частямъ, ближайшимъ къ другому. Но можно разсматривать только часть поля, и тогда все разсматриваемое поле можетъ быть одного знака. Магнитъ, перемѣщаемый въ магнитномъ полѣ, также имѣетъ два полюса, и надо всегда разсматривать работу магнитныхъ силъ, дѣйствующихъ какъ на одинъ полюсъ, такъ и на другой.

§ 95. Положимъ, что въ точкѣ N (фиг. 40) находится сѣверный полюсъ магнитной полосы, южный полюсъ которой находится влѣво на такомъ большомъ разстояніи, что не оказываетъ никакого вліянія въ точкахъ, лежащихъ вправо отъ N. Линія AB указываетъ границу поля. Пусть въ точкѣ C находится кусокъ мягкаго желѣза. Будемъ перемѣщать этотъ кусокъ желѣза по направленію къ магниту. Какъ только кусокъ этотъ войдетъ въ поле, онъ начнетъ намагничиваться на сторонѣ, обращенной къ N, южнымъ магнитизмомъ, на противоположной сторонѣ — сѣвернымъ. При перемѣщеніи куска желѣза изъ положенія D въ положеніе B равнодѣйствующая магнитныхъ силъ, дѣйствующихъ на полюсы s и n, произведетъ положительную работу, потому что кусокъ желѣза притягивается къ магниту N. При удаленіи обратно въ точку C, равнодѣйствующая сила произведетъ отрицательную работу, равную по абсолютной величинѣ той, какая была произведена при приближеніи куска желѣза. Сумма произведенныхъ работъ равна нулю; кусокъ желѣза размагнитился, и все вернулось къ прежнему положенію.



Фиг. 40.

Предположимъ теперь на мѣстѣ куска желѣза кусокъ стали. Приблизивъ его къ магниту N, продержимъ его столько времени, чтобы онъ намагнитился. Тогда по удаленіи въ точку C, кусокъ стали остался бы намагниченнымъ и мы получили бы нѣкоторое приращеніе магнитной энергіи. Источникомъ этой магнитной энергіи служитъ работа внѣшней силы. Въ самомъ дѣлѣ, при обратномъ перемѣщеніи отъ N къ C, магнитныя силы, дѣйствующія на полюсы n и s были больше, чѣмъ

при движеніи къ N, пропорціонально усиленію магнитизма въ этихъ полюсахъ. Поэтому и равнодѣйствующая этихъ силъ, равная ихъ разности, была во всѣхъ соотвѣтствующихъ точкахъ обратнаго пути во столько же разъ больше, а слѣд. и работу произвела по абсолютной величинѣ бòльшую. Итакъ, во время всего процесса магнитная сила произвела отрицательную работу, и магнитная энергія возрасла на счетъ работы внѣшней силы, передвигавшей магнитъ *ns*.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

(Окончаніе слѣдуетъ).

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМЪ ПРЕОБРАЗОВАНІИ Laguerre'а.

(Transformation par semi-droites réciproques).

1. Если какую бы то ни было линію разсматривать какъ траэкторію движущейся точки, то для полнаго опредѣленія ея слѣдуетъ принимать во вниманіе направленіе этого движенія. При этомъ, всякую прямую, направленіе которой не задано, можно разсматривать, какъ систему двухъ прямыхъ, совпадающихъ по положенію, но имѣющихъ противоположныя направленія (semi-droites opposées). Равнымъ образомъ и всякую окружность (или вообще кривую) можно разсматривать, какъ систему двухъ окружностей противоположныхъ направленій (cycles opposés).

2. Касательная къ кривой имѣетъ направленіе элемента этой кривой въ точкѣ касанія; обратно, направленіе касательной опредѣляетъ направленіе кривой. Отсюда слѣдуетъ, что:

a) Къ данной окружности можно провести только одну касательную. параллельную данной прямой, и въ данномъ направленіи.

b) Двѣ окружности, при данномъ направленіи ихъ, не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ касательныхъ; касательныя эти суть внѣшнія, если окружности имѣютъ одно и то же направленіе,—и внутреннія, если направленія окружностей противоположны. Въ первомъ случаѣ окружности имѣютъ центръ только прямого подобія, — во второмъ — только обратнаго.

3. Противоположныя направленія двухъ параллельныхъ или совпадающихъ прямыхъ будемъ отличать знаками + и —.

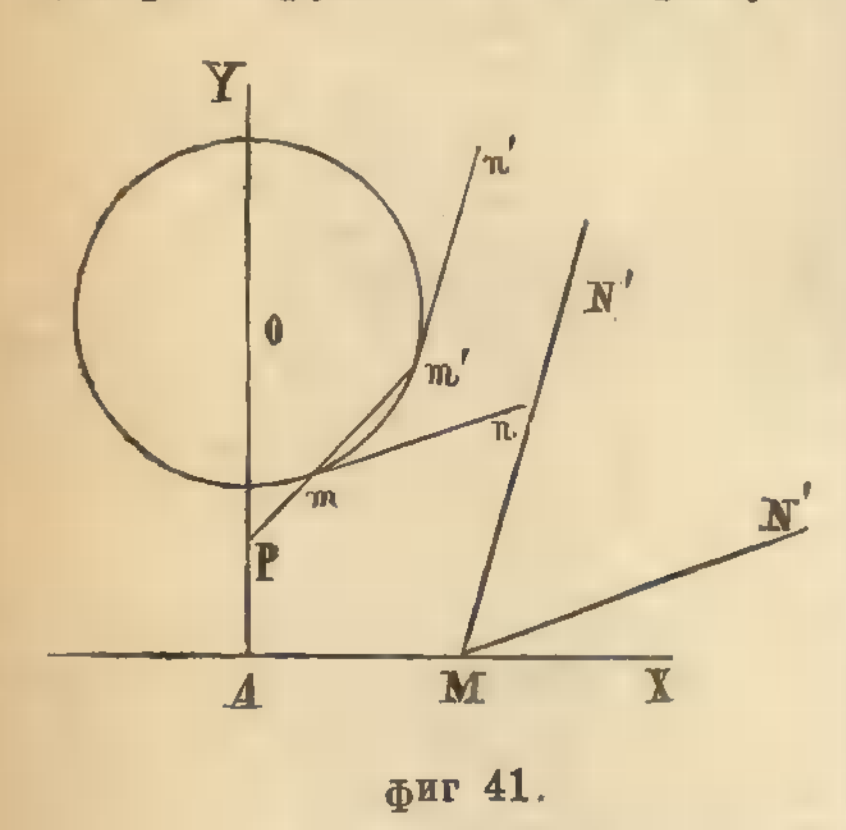
Противоположныя направленія двухъ окружностей условимся отличать знаками + и — при ихъ радіусахъ. При такомъ условіи, длина T общей касательной къ окружностямъ радіусовъ r и r' всегда опредѣляется формулой

$$T^2 = d^2 - (r - r')^2,$$

гдѣ d—разстояніе между центрами окружностей.

4. Разстояніе точки отъ прямой даннаго направленія есть радіусъ окружности, описанной около этой точки и касательной къ прямой; разстояніе это берется съ тѣмъ же знакомъ, какой имѣетъ радіусъ окружности. Такимъ образомъ, разстояніе отъ точки до прямой, какъ и разстояніе между двумя точками, опредѣляется по величинѣ и по знаку.

5. Зададимся на плоскости прямою AX, направленною отъ A къ X, окружностью O, направленіе которой противоположно движенію часовой стрѣлки, и точкой P на перпендикулярѣ OA, опущенномъ изъ центра окружности на прямую AX (фиг. 41). Пусть въ той же плоскости дана прямая MN. Проведемъ къ окружности касательную $mn \parallel MN$; соединимъ P съ точкой касанія m и продолжимъ Pm до второго пересѣченія съ окружностью въ точкѣ m'; черезъ эту точку проведемъ другую касательную $m'n'$. Прямая MN′, проходящая черезъ точку пересѣченія M данной прямой MN съ прямой AX и параллельная касательной $m'n'$, есть *преобразованіе* прямой MN. Изъ построенія видно, что прямая MN есть преобразованіе прямой MN′; поэтому эти прямыя наз. *сопряженными.*



фиг 41.

Если прямая MN обертываетъ нѣкоторую кривую Σ, то сопряженная съ ней прямая MN′ также обертываетъ нѣкоторую кривую Σ', которая наз. *преобразованіемъ* Σ. Кривыя Σ и Σ' суть *сопряженныя*; точки касанія ихъ съ сопряженными прямыми наз. *соотвѣтственными.*

Такова сущность геометрическаго преобразованія Laguerre'а.

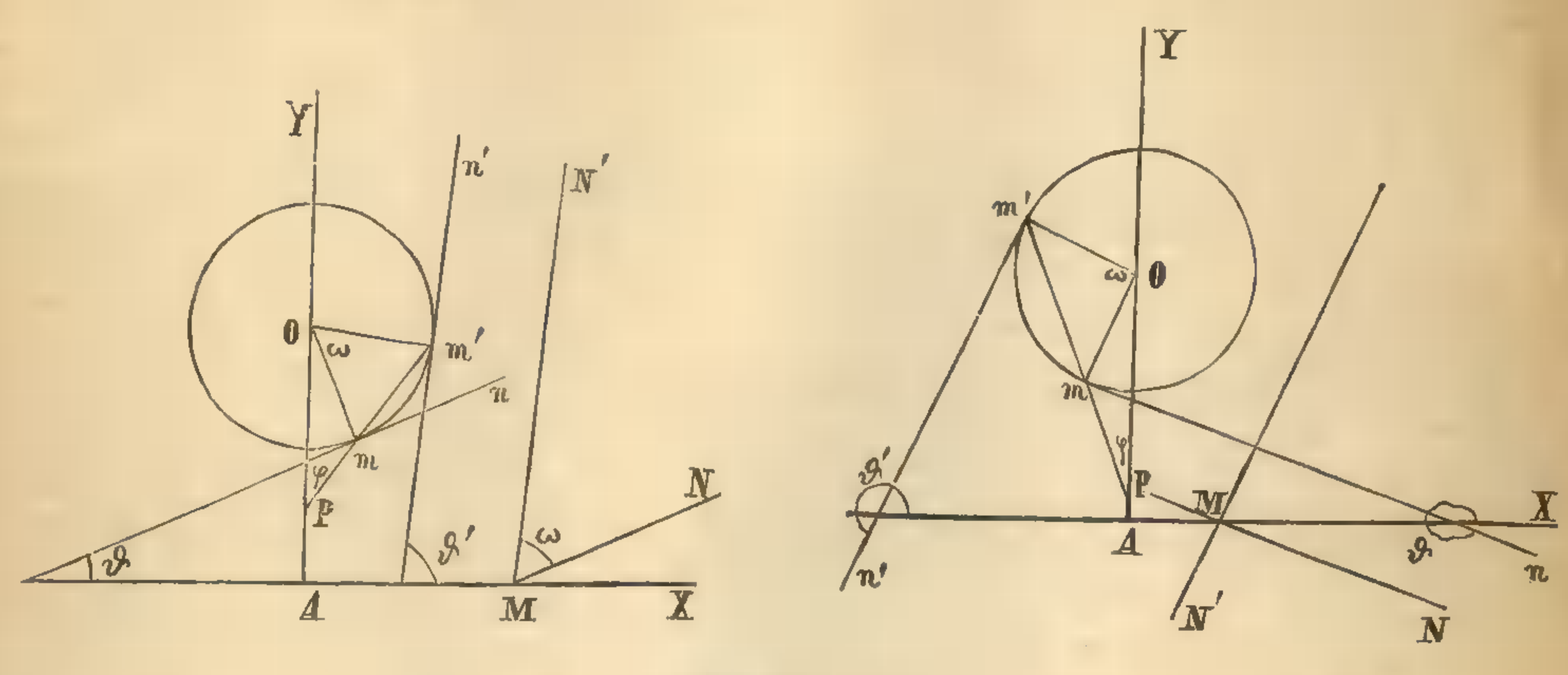
6. Главнѣйшія особенности описаннаго преобразованія можно найти въ „Traité de Géometrie" par. E. Rouché et C. de Comberousse (6-me ed., I-re partie). Не имѣя въ виду излагать ихъ здѣсь, замѣтимъ только, что преобразованіе Laguerre'а по геометрическимъ свойствамъ аналогично съ преобразованіемъ, называемымъ *инверсіей* (inversion, transformation par rayons vecteurs réciproques). Послѣднее, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что точка M, опредѣляющаяся векторамъ ϱ, преобразуется въ точку M′, векторъ которой ϱ' связанъ съ ϱ ур-ніемъ

$$\varrho . \varrho' = r^2 \text{ (пост.)},$$

характеризующимъ преобразованіе. Въ настоящей замѣткѣ мы намѣрены вывести аналогичное ур-ніе для преобразованія Laguerre'а, изъ котораго слѣдуютъ всѣ геометрическія свойства этого преобразованія.

7. Обозначимъ черезъ R радіусъ *окружности преобразованія*, имѣющей центръ O на перпендикулярѣ AУ къ *оси* AX. Разстояніе *полюса* P отъ центра O обозначимъ черезъ p, считая p положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли отрѣзокъ OP направленіе отъ A къ У, или противоположное. (Фиг. 42). Пусть MN и MN′ суть сопряженныя прямыя. Положеніе этихъ прямыхъ опредѣляется разстояніемъ точки M отъ *начала* A и углами $XMN = \vartheta$ и $XMN' = \vartheta'$, кото-

рые условимся считать положительными отъ оси AX въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки. Задача наша состоитъ въ отысканіи зависимости между ϑ и ϑ'.



Фиг. 42.

8. Обозначимъ черезъ φ уголъ УРm, составленный сѣкущею Рm съ положительнымъ направленіемъ АУ, и условимся считать этотъ уголъ положительнымъ въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки отъ РУ. При этомъ условіи уголъ φ, при всякомъ положеніи полюса Р, имѣетъ отрицательное значеніе при измѣненіи ϑ отъ 0^0 до π, —и положительное—при измѣненіи ϑ отъ π до 2π. Наибольшее (по абсолютной величинѣ) значеніе φ при $p<0$ и наименьшее при $p>0$ есть уголъ Φ, составленный касательной изъ полюса Р къ окружности преобразованія. Этотъ уголъ Φ будемъ называть предѣльнымъ угломъ преобразованія; величина его опредѣляется формулами

$$\sin\Phi=\frac{R}{p}, \cos\Phi=\frac{\sqrt{p^2-R^2}}{p}, \ \operatorname{tg}\Phi=\frac{R}{\sqrt{p^2-R^2}},$$

или

$$\sin\Phi=\frac{1}{m}, \cos\Phi=\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}, \ \operatorname{tg}\Phi=\frac{1}{\sqrt{m^2-1}},$$

гдѣ $m=\frac{p}{R}$ наз. *модулемъ* преобразованія.

9. Положимъ, $\vartheta'-\vartheta=\omega$. Замѣчая, что $\omega=\angle m0m'$ и принимая во вниманіе знакъ угла ω, находимъ (фиг. 42), что

1) при $p<0$

$$\text{для } \vartheta\leqslant\pi \begin{cases} \vartheta=\frac{\pi}{2}+\varphi-\frac{\omega}{2}, \\ \vartheta'=\frac{\pi}{2}+\varphi+\frac{\omega}{2}; \end{cases} \quad \text{для } \vartheta\geqslant\pi \begin{cases} \vartheta=\frac{3}{2}\pi+\varphi-\frac{\omega}{2}, \\ \vartheta'=\frac{3}{2}\pi+\varphi+\frac{\omega}{2}; \end{cases}$$

2) при $p > 0$

для $\vartheta \leqslant \pi \begin{cases} \vartheta = \frac{3}{2}\pi + \varphi - \frac{\omega}{2}, \\ \vartheta' = \frac{3}{2}\pi + \varphi + \frac{\varphi}{2}; \end{cases}$ для $\vartheta \geqslant \pi \begin{cases} \vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\omega}{2}, \\ \vartheta' = \frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{\omega}{2}; \end{cases}$

отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ p и ϑ углы ϑ, ϑ' и φ связаны уравненіемъ $\vartheta + \vartheta' = \pi + 2\varphi$, такъ что

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta') = \operatorname{tg}2\varphi.$$

10. Изъ тѣхъ же равенствъ имѣемъ:

	1) при $p < 0$	2) при $p > 0$
для $\vartheta \leqslant \pi$:	$\sin(\vartheta' - \varphi) = \cos\frac{\omega}{2}$,	$\sin(\vartheta' - \varphi) = -\cos\frac{\omega}{2}$,
для $\vartheta \geqslant \pi$:	$\sin(\vartheta' - \varphi) = -\cos\frac{\omega}{2}$,	$\sin(\vartheta' - \varphi) = \cos\frac{\omega}{2}$.

Но $\qquad R\cos\frac{\omega}{2} = \pm p\sin\varphi$, или $\cos\frac{\omega}{2} = \pm m\sin\varphi$;

такъ какъ $\cos\frac{\omega}{2} \geqslant 0$ всегда, то во второй части этого равенства слѣдуетъ брать $+$ при $p < 0$ и $\varphi < 0$, т. е. при $\vartheta \leqslant \pi$,
$-$ при $p < 0$ и $\varphi > 0$, т. е. при $\vartheta \geqslant \pi$,
$+$ при $p > 0$ и $\varphi > 0$, т. е. при $\vartheta \geqslant \pi$,
$-$ при $p > 0$ и $\varphi < 0$, т. е. при $\vartheta \leqslant \pi$,

слѣдовательно во всѣхъ случаяхъ

$$\sin(\vartheta' - \varphi) = m\sin\varphi,\ \cos(\vartheta' - \varphi) = \sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}.$$

Раскрывъ здѣсь лѣвыя части и освободившись отъ радикаловъ, получимъ:

$$\sin\vartheta'\cos\varphi - (\cos\vartheta' + m)\sin\varphi = 0,$$

$$\cos^2\vartheta'\cos^2\varphi + (\sin\vartheta' - m)\sin^2\varphi + 2\sin\vartheta'\cos\vartheta'\sin\varphi\cos\varphi = 1;$$

рѣшивъ эти ур-нія относительно $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, получимъ

$$\sin\varphi = \frac{\sin\vartheta'}{\sqrt{1 + 2m\cos\vartheta' + m^2}},\ \cos\varphi = \frac{\cos\vartheta' + m}{\sqrt{1 + 2m\cos\vartheta' + m^2}}.$$

Но изъ уравненія

$$\vartheta + \vartheta' = \pi + 2\varphi$$

слѣдуетъ, что

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta'\cos2\varphi - \cos\vartheta'\sin2\varphi,$$

$$\cos\vartheta = -\cos\vartheta'\cos2\varphi - \sin\vartheta'\sin2\varphi;$$

исключивъ отсюда φ на основанiи предыдущихъ формулъ, получимъ:

$$\sin\vartheta = \frac{(m^2-1)\sin\vartheta'}{1+2m\cos\vartheta'+m^2},$$

$$\cos\vartheta = -\frac{2m+(m^2+1)\cos\vartheta'}{1+2m\cos\vartheta'+m^2}.$$

Такъ какъ ϑ' получается изъ ϑ такъ же, какъ ϑ изъ ϑ', то въ послѣднихъ формулахъ можно переставить ϑ на мѣсто ϑ' и наоборотъ; такимъ образомъ получимъ:

$$\sin\vartheta' = \frac{(m^2-1)\sin\vartheta}{1+2m\cos\vartheta+m^2},$$

$$\cos\vartheta' = -\frac{2m+(m^2+1)\cos\vartheta}{1+2m\cos\vartheta+m^2}.$$

Отсюда, по формуламъ

$$\cos\frac{\vartheta'}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta'}{2}},\ \sin\frac{\vartheta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta'}{2}},$$

находимъ:

$$\cos\frac{\vartheta'}{2} = -\frac{(m+1)\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-2m\cos\vartheta+m^2}},\ \sin\frac{\vartheta'}{2} = \frac{(m-1)\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1-2m\cos\vartheta+m^2}};$$

слѣдовательно

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} = \frac{m-1}{m+1}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} = \frac{m-1}{m+1}\ (\text{пост.}).$$

Таково искомое соотношенiе между сопряженными углами при преобразованiи Laguerre'а.

11. Вторую часть полученнаго ур-нiя можно представить въ другомъ видѣ. Обозначимъ черезъ Θ значенiе ϑ, соотвѣтствующее предѣльному углу Φ.

Положивъ $\vartheta = \vartheta' = \Theta$, получимъ

$$\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2} = \frac{m-1}{m+1};$$

а потому

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}.$$

Въ этомъ видѣ основное уравненіе преобразованія Laguerre'a вполнѣ аналогично уравненію инверсіи

$$\varrho . \varrho' = r^2.$$

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 260. Внутри треугольника ABC дана точка M. Построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCM_2$ и $CMAM_3$. Доказать, что прямыя AM_2, BM_3 и CM_1 пересѣкаются въ одной точкѣ.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 261. Опредѣлить треугольникъ съ наименьшимъ периметромъ и площадью, который можно описать около эллипса такъ, чтобы одна сторона была параллельна оси.

А. Варенцовъ (Шуя).

№ 262. Опредѣлить истинную величину выраженія

$$\frac{(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cosec}\beta)\sin\alpha}{(\beta - \alpha)}$$

при $\alpha = \beta = 45^0$.

Э. Заторскій (Вильно).

№ 263. По даннымъ высотамъ треугольника вычислить его стороны и площадь.

П. Бѣловъ (с. Знаменка).

№ 264. На линіи центровъ двухъ окружностей задана точка. Провести черезъ эту точку сѣкущую такъ, чтобы сумма (или разность) частей ея, заключающихся въ окружностяхъ, равнялась данному отрѣзку.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 265. Опредѣлить внутренніе углы ромбовъ, ограничивающихъ ромбическій додекаэдръ, и сравнить ихъ съ линейными углами двугранныхъ угловъ правильнаго тетраэдра и правильнаго октаэдра.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 126 (3 сер.). ABC есть равнобедренный треугольникъ, вершина котораго A; произвольная прямая опирается своими концами D и E на равныя стороны, D_1E_1—ея проэкція на основаніе BC; черезъ средину F прямой ED проведена параллельно основанію прямая GH, ограниченная равными сторонами. Доказать, что $GH=D_1E_1$.

Пусть прямая GH встрѣчаетъ линію DD_1 въ точкѣ D_2, а линію EE_1—въ точкѣ E_2. Очевидно, что прямоугольные треугольники DD_2F и EE_2F равны, а потому $EE_2=DD_2$. Такъ какъ, кромѣ того $\angle D_2DG=\angle E_2EH$, то $\triangle DD_2G=\triangle EE_2H$, т. е. $D_2G=E_2H$, а потому и $D_1E_1=D_2E_2=D_2G+GE_2=GE_2+E_2H=GH$.

А. Варенцовъ (Шуя); *Э. Заторскій, И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *А. Павлычевъ, Н. Кузнецовъ* (Иваново-Вознесенскъ); *Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ).

№ 127 (3 сер.). Доказать, что прямая DE, проходящая черезъ середину D гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника ABC и черезъ одну изъ точекъ E, въ которыхъ катетъ AB дѣлится на три равныя части, отсѣкаетъ на продолженіи катета AC отрѣзокъ $C_1A=AC$.

Пусть точка E есть точка дѣленія, лежащая ближе къ вершинѣ прямого угла. Такъ какъ прямая C_1D есть медіана треугольника C_1BC, и $BE=2AE$, то и BA есть медіана того же треугольника, т. е. $C_1A=AC$.

Если соединимъ точку D съ точкою дѣленія E_1, катета AB, лежащею ближе къ вершинѣ B остраго угла, то прямая E_1D пересѣчетъ продолженіе катета AC въ такой точкѣ C_2, что $AC=CC_2$. Дѣйствительно, опустивъ изъ точки D перпендикуляръ DF на катетъ AC, изъ подобныхъ треугольниковъ AE_1C_2 и DFC_2 получимъ:

$$\frac{AC_2}{FC_2}=\frac{AE_1}{DF}=\frac{4}{3}.$$

Такъ какъ $AF=FC=\dfrac{AC}{2}$, то

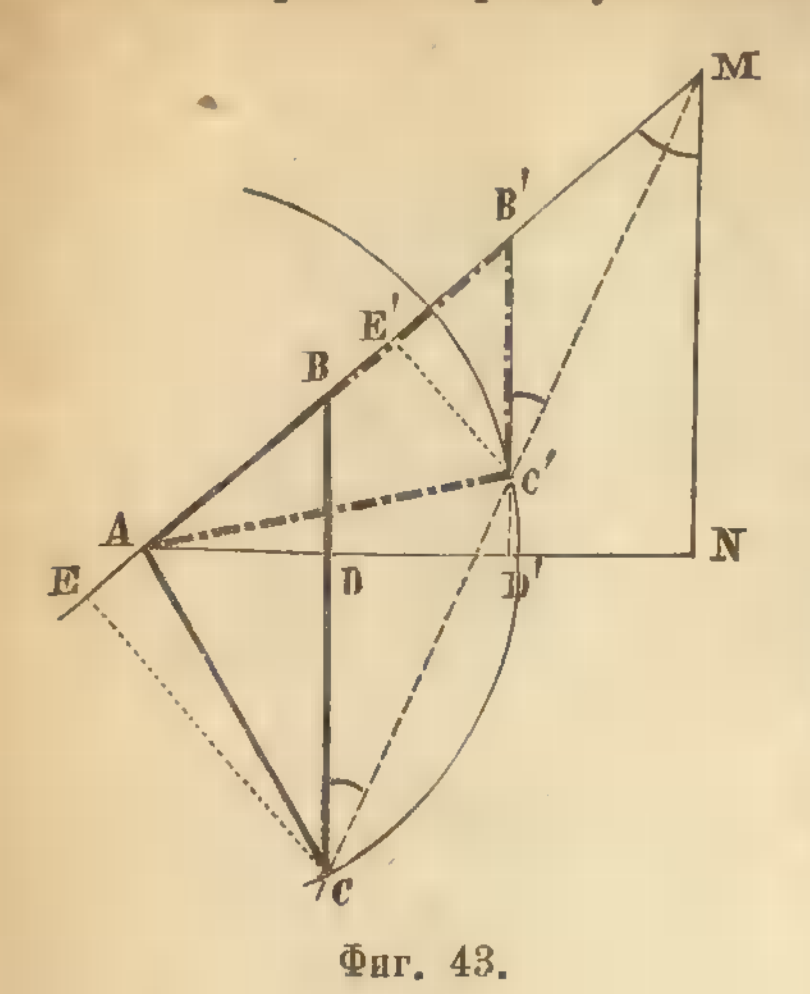
$$\frac{AC+CC_2}{CC_2+\dfrac{AC}{2}}=\frac{4}{3},$$

откуда $AC=CC_2$.

А. Павлычевъ, Н. Кузнецовъ, V. N. (Иваново-Вознесенскъ); *П. Р.* (Ромны); *Б. Гальпернъ* (Пинскъ); *А. Мошковскій* (Варшава); *Э. Заторскій, И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *А. Качинскій* (Холмъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *L.* (Тамбовъ); *А. Варенцовъ* (Шуя); *Я. Попушкинъ* (с. Знаменка); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ).

№ 185 (3 сер.). Построить треугольникъ по данной сторонѣ b, по суммѣ двухъ другихъ сторонъ $a+c$ и по суммѣ h_a+h_c высотъ, опущенныхъ на эти стороны.

Построивъ прямоугольный треугольникъ AMN (фиг. 43) по гипотенузѣ $AM = a + c$ и по катету $AN = h_a + h_c$, проводимъ биссекторъ CM угла M и изъ точки A описываемъ дугу радіусомъ b, пересѣкающую MC въ точкахъ C и C'. Проведя $CB \parallel MN$ и $C'B' \parallel MN$, получимъ два треугольника, ABC и $AB'C'$, удовлетворяющихъ требованіямъ задачи.



Фиг. 43.

Дѣйствительно, $\angle AMC = \angle CMN = \angle BCM$, т. е. $BC = BM$. Опустивъ изъ точки C перпендикуляръ CE на AM и обозначивъ черезъ D точку пересѣченія AN и BC, получимъ

$$\frac{BC}{CE} = \frac{AM}{AN} \text{ и } \frac{BM}{DN} = \frac{AM}{AN},$$

откуда $\frac{BC}{CE} = \frac{BM}{DN}$,

а такъ какъ $BC = BM$, то и $CE = DN$.

Подобнымъ же образомъ строится треугольникъ и по b, $a - c$ и $h_a - h_c$.

L., *В. Сахаровъ* (Тамбовъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *А. Шантырь* (Спб.); *воспитанники Глуховскаго Учит. Института К. и Θ.*; *неизвѣстный* (Бѣлостокъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *С. Григорьева* (Самара) 243 (3 сер.); *В. Поздюнина* (Самара) 240, 249 (3 сер.); *М. Зимина* (Орелъ) 180, 226, 228, 229, 230, 232, 235, 237, 238, 239, 240, 241, 243, 244, 245, 248, 249, 250, 252 (3 сер.); *В. Сахарова* (Тамбовъ) 249 (3 сер.); *С. Зайцева* (Курскъ) 230, 232, 234, 236, 239, 240, 241 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 251, 252 (3 сер.), 546 (2 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 188 (1 сер.); *Ю. Идельсона* (Одесса) 255 (3 сер.); *учениковъ Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.* 188, 189, 192, 197, 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 217, 218, 221 (3 сер.).

ОСТАЛИСЬ НЕРѢШЕННЫМИ изъ числа предложенныхъ въ XVII и XVIII семестрахъ задачи 94, 97, 101, 114, 117, 149, 164, 177, 196, 199, 223.



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 2-го Декабря 1895 г.

„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL

de mathématiques élémentaires.

1895.—№ 3.

Questions d'enseignement. Par M-me V-ve *F. Prime.* Излагается общая теорія проэктированія на данную ось; между прочимъ доказывается слѣдующая теорема *Laisant'a*: *Если имѣютъ мѣсто тождества*

$$\sum_1^n r_i \cos\alpha_i \equiv 0 \text{ и } \sum_1^n r_i \cos(\alpha_i + p) \equiv 0,$$

при условіи

$$p \neq k\pi,$$

то при всякомъ q

$$\sum_1^n r_i \cos(\alpha_i + q) = 0.$$

Demonstration géométrique de l'inégalité $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$. Par M. *Maurice Fouché.* (Фиг. 54). Если x обозначаетъ дугу AM, то при радіусѣ $= 1$ разность $x - \sin x$ выражаетъ удвоенную площадь сегмента, ограниченнаго дугой x и соотвѣтственной хордой. Проведя касательную, параллельную хордѣ AM, и построивъ прямоугольникъ AMCB, замѣтимъ, что площадь сегмента меньше площади прямоугольника; поэтому

Фиг. 54.

$$x - \sin x < 2AM.ED = 4\sin\frac{x}{2}\cdot\left(1\ \ \cos\frac{x}{2}\right),$$

или

$$x - \sin x < 8\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4};$$

слѣдовательно и подавно

$$x - \sin x < 8\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{16} = \frac{x^3}{4}.$$

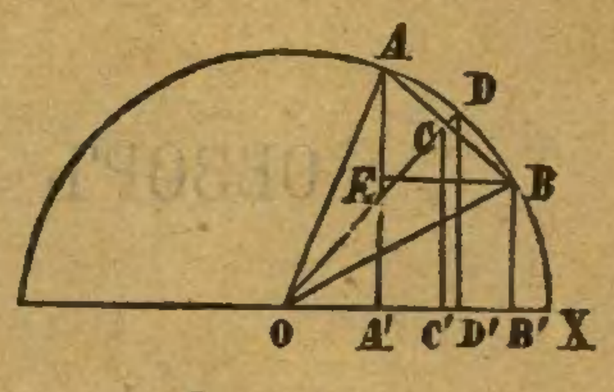
Propriétés du carré magique de 3. Par M. *G. Tarry.* Составимъ три магическихъ квадрата, имѣющихъ по 9 клѣтокъ. Въ клѣткахъ 1-го квадрата поставимъ первые девять чиселъ въ обыкновенномъ порядкѣ составленія магическихъ квадратовъ. Въ клѣткахъ 2-го квадрата помѣстимъ тѣ же первые девять чиселъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ, начиная съ произвольной клѣтки и слѣдуя по горизонтальному направленію въ ту или другую сторону. Клѣтки 3-го квадрата заполнимъ такъ, чтобы въ каждой клѣткѣ его стояло произведеніе чиселъ, находящихся въ

соотвѣтственныхъ клѣткахъ первыхъ двухъ квадратовъ. Оказывается, что сумма всѣхъ чиселъ 3-го квадрата всегда равна

$$225 = 5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).$$

Correspondance. Проф. *Esquirol* сообщаетъ слѣдующій геометрическій выводъ формулъ

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \frac{A \pm B}{2} \cdot \cos \frac{A \mp B}{2},$$



Фиг. 55.

гдѣ A и B—углы одного тр-ка. Полагая, что $B < A$, построимъ $\angle XOA = A$, $\angle XOB = B$; пусть OD есть биссектриса угла BOA. Опишемъ около O окружность, радіусъ которой $= 1$; проведемъ $BE \parallel XO$ и изъ точекъ A, B, C, D опустимъ перпендикуляры AA', BB', CC', DD' на OX. Тогда

$$\angle AOD = \angle BOD = \frac{A-B}{2}, \ \angle XOD = \frac{A+B}{2}; \ CC' = \frac{AA' + BB'}{2}, \ AE = AA' - BB'.$$

Изъ подобія тр-въ OCC' и ODD' найдемъ, что $CC' = OC.DD'$; поэтому

$$AA' + BB' = 2.OC.DD'$$

Изъ подобія тр-въ BAE и ODD', гдѣ $AB = 2AC$, получимъ $AE = 2AC.OD'$, или

$$AA' - BB' = AC.OD'.$$

Подставивъ въ эти равенства вмѣсто линій ихъ тригонометрическія значенія, получимъ искомыя формулы. (Фиг. 55).

Sur les caractères de divisibilité. Par M. *Maurice Fouché* (Suite et fin). Изъ предыдущаго (См. Обз. J. E. № 2) слѣдуетъ, что признаки дѣлимости опредѣляются слѣдующими числами:

1) Числомъ p цифръ въ граняхъ, на которыя разбито данное число; число это есть наименьшее, при которомъ

$$10^{p} = md + 1.$$

2) Числомъ $\frac{p}{2}$, указывающимъ на дѣленіе преобразованнаго числа на новыя двѣ грани, изъ которыхъ лѣвая вычитается изъ правой, въ томъ случаѣ, когда

$$10^{p:2} = md - 1.$$

3) Группами чиселъ k и α, удовлетворяющихъ условію

$$10^{k} = md + \alpha$$

и выбранныхъ, какъ было указано выше.

4) Числомъ n, при которомъ

$$10n = md \pm 1.$$

Авторъ приводитъ таблицу этихъ чиселъ для дѣлителей простыхъ съ 10 до 121 включительно. По этой таблицѣ находимъ, напр.